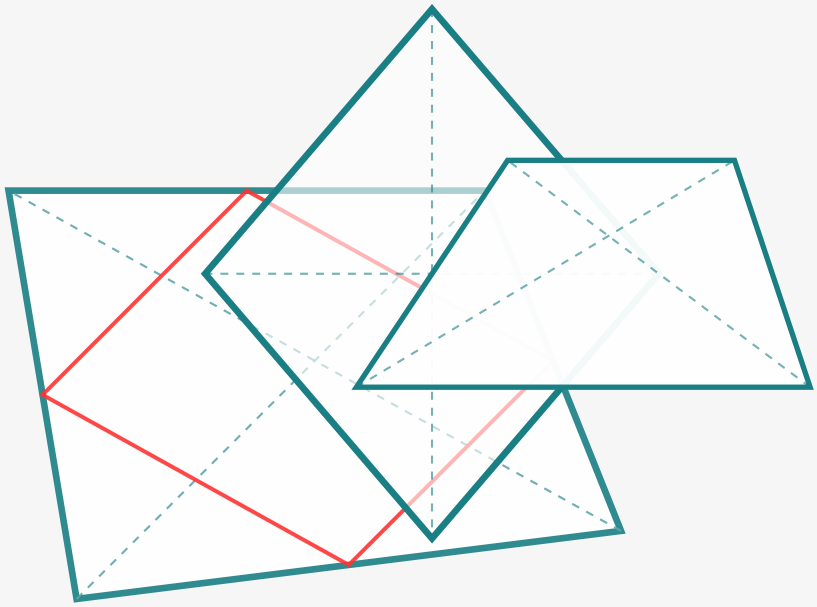
Compendio de

Cuadriláteros Convexos



Sebastián Berrueta

Resumen

Este documento combina definiciones, propiedades y teoremas fundamentales sobre cuadriláteros convexos. Incluye demostraciones, ejemplos gráficos y una comparativa entre los distintos tipos (paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados, trapecios, trapezoides).

Índice general

1 Definición y concepto básico **3**
- 1.1 Qué es un cuadrilátero . . . 3
- 1.2 Qué lo hace convexo . . . 3
- 1.3 Diferencia con los cóncavos . . . 3

2 Características generales **4**
- 2.1 Lados, vértices y diagonales . . . 4
- 2.2 Condición de convexidad ($\theta < 180°$) . . . 4
- 2.3 Intersección de diagonales . . . 4

3 Propiedades fundamentales **5**
- 3.1 Suma de ángulos interiores = 360° . . . 5
- 3.2 Tipos de diagonales y comportamiento . . . 5
- 3.3 Simetrías . . . 6
  - 3.3.1 Simetrías de paralelogramos . . . 6
  - 3.3.2 ¿Qué pasa con los cuadriláteros convexos que no son paralelogramos? . . . 8

4 Clasificación de los cuadriláteros convexos **9**
- 4.1 Familias principales . . . 9
- 4.2 Propiedades superpuestas . . . 11
- 4.3 Cuadro comparativo de propiedades . . . 11

5 Teoremas importantes **12**
- 5.1 Teorema de Varignon . . . 12
- 5.2 Desigualdad de Ptolomeo . . . 14
- 5.3 Teorema de Bretschneider . . . 17

6 Ejercicios **21**
6.1 Ejercicios básicos 21
6.2 Ejercicios intermedios 21
6.3 Ejercicios avanzados 21

7 Soluciones **22**
7.1 Ejercicios básicos 22
7.2 Ejercicios intermedios 22
7.3 Ejercicios avanzados 24

1. Definición y concepto básico

1.1. Qué es un cuadrilátero

Definición 1.1. *Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados y cuatro vértices. Convencionalmente se nombra ABCD siguiendo el orden de sus vértices.*

1.2. Qué lo hace convexo

Definición 1.2. *Un cuadrilátero es **convexo** si todos sus ángulos interiores miden menos de* 180°. *Equivalentemente, el segmento que une dos puntos cualesquiera del interior permanece dentro del cuadrilátero.*

1.3. Diferencia con los cóncavos

Un cuadrilátero **cóncavo** tiene al menos un ángulo interior mayor que 180°; por lo general una diagonal queda fuera de la figura.



Convexo Cóncavo

Figura 1: Comparativa visual entre cuadriláteros convexo y cóncavo.

2. Características generales

2.1. Lados, vértices y diagonales

Todo cuadrilátero convexo presenta:

- **Cuatro lados** y **cuatro vértices**, condición esencial de cualquier cuadrilátero.
- **Dos diagonales**, las cuales se intersectan siempre en un punto interior a la figura.

El hecho de que las diagonales se crucen dentro garantiza que el cuadrilátero puede dividirse en cuatro triángulos de área positiva, lo cual será relevante en propiedades y teoremas posteriores.

2.2. Condición de convexidad ($\theta < 180°$)

Cada ángulo interior debe ser estrictamente menor que 180°. Si algún ángulo llega o supera los 180°, el polígono deja de ser convexo y pasa a ser cóncavo.

Esta condición asegura que toda la figura se encuentra contenida en el interior de su polígono, sin "entrantes" ni autointersecciones.

2.3. Intersección de diagonales

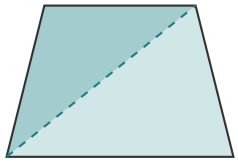
En los cuadriláteros convexos, las diagonales se cortan en un punto único situado dentro de la figura. Dicha intersección no solo distingue a los convexos de los cóncavos, sino que también sirve de base para varios resultados clásicos, como el teorema de Varignon y las propiedades métricas de los cuadriláteros cíclicos.

3. Propiedades fundamentales

3.1. Suma de ángulos interiores = 360°

Propiedad 3.1. *La suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo es* 360°.

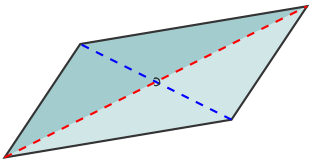
Prueba. Trazando una diagonal se obtienen dos triángulos cuya suma de ángulos es 180° cada uno, por lo tanto $180° + 180° = 360°$. □



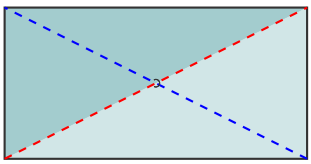
$180° + 180° = 360°$

3.2. Tipos de diagonales y comportamiento

- **Romboide:** las diagonales se bisecan mutuamente.

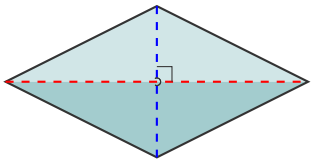


- **Rectángulo:** las diagonales son iguales.

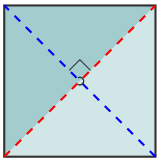


$d_1 = d_2$

- **Rombo:** las diagonales son perpendiculares.



- **Cuadrado:** las diagonales son iguales, perpendiculares y se bisecan.



$d_1 = d_2$

3.3. Simetrías

La **simetría** se refiere a las transformaciones geométricas que se pueden aplicar a una figura de modo que esta permanezca sin cambios, es decir, que la figura transformada coincida exactamente con la original. Existen dos tipos principales de simetría:

- **Simetría de reflexión (o axial):** Ocurre cuando una figura puede ser dividida por una línea recta, llamada **eje de simetría**, en dos mitades que son imágenes especulares la una de la otra. Al "doblar" la figura por este eje, ambas partes coinciden.
- **Simetría rotacional:** Se presenta cuando una figura puede ser girada un cierto ángulo (menor a 360°) alrededor de un punto fijo, llamado **centro de rotación**, y coincide con su posición original. Para los paralelogramos, este centro es siempre el punto donde se cruzan sus diagonales.

3.3.1 Simetrías de paralelogramos

1. **Romboide**

El romboide tiene simetría rotacional de 180°, pero **no tiene ejes de simetría**.

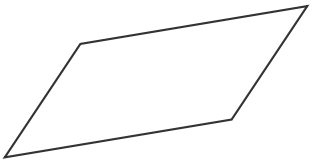


Figura 2

Se puede rotar 180° alrededor del centro y el romboide se superpone consigo mismo.

2. **Rectángulo**

El rectángulo tiene simetría rotacional de 180° y **dos ejes de simetría** (horizontal y vertical).

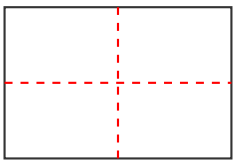


Figura 3

Al reflejarse sobre los ejes o rotar 180°, mantiene su forma.

3. **Rombo**

El rombo tiene simetría rotacional de 180° y **dos ejes de simetría** que coinciden con sus diagonales.

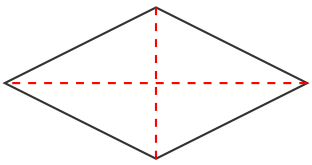


Figura 4

Se refleja sobre las diagonales y se ve igual tras rotación de 180°.

4. **Cuadrado**

El cuadrado tiene simetría rotacional de 90° y **cuatro ejes de simetría** (horizontal, vertical y diagonales).

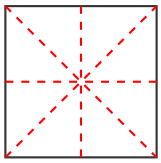


Figura 5

Mantiene su forma tras rotaciones de 90°, 180°, 270° y reflecciones sobre todos sus ejes.

3.3.2 ¿Qué pasa con los cuadriláteros convexos que no son paralelogramos?

La mayoría de los cuadriláteros convexos generales **no poseen ningún tipo de simetría**, ni rotacional ni de reflexión. Sin embargo, existen casos especiales notables:

- **Trapecio isósceles:** Tiene **un eje de simetría**, que es la línea que une los puntos medios de sus lados paralelos. No tiene simetría rotacional.

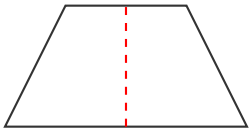


Figura 6

- **Deltoide (o cometa):** Tiene **un eje de simetría**, que es una de sus diagonales (la que une los vértices donde concurren los lados de igual longitud). Generalmente, no tiene simetría rotacional.

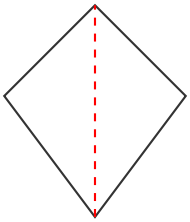


Figura 7

Fuera de estos casos, un cuadrilátero dibujado al azar no tendrá ejes de simetría ni se superpondrá consigo mismo al rotarlo menos de 360°.

4. Clasificación de los cuadriláteros convexos

4.1. Familias principales

Los cuadriláteros convexos se clasifican principalmente según el número de pares de lados paralelos y otras propiedades como igualdad de lados o ángulos. A continuación, se detalla una clasificación ampliada:

- **Paralelogramo**: Dos pares de lados paralelos y opuestos iguales.
  - **Rectángulo**: Paralelogramo con cuatro ángulos rectos (90°).
  - **Rombo**: Paralelogramo con cuatro lados iguales.
  - **Cuadrado**: Paralelogramo que es rectángulo y rombo a la vez.
  - **Romboide**: Paralelogramo que no es ni rectángulo ni rombo.
- **Trapecio**: Exactamente un par de lados paralelos (llamados bases).
  - **Trapecio isósceles**: Las piernas (lados no paralelos) son iguales, y los ángulos adyacentes a cada base son iguales.
  - **Trapecio rectángulo**: Tiene al menos dos ángulos rectos.

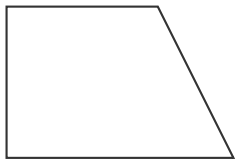


Figura 8Ejemplo de trapecio rectángulo.

  - **Trapecio escaleno**: Piernas de longitudes diferentes.

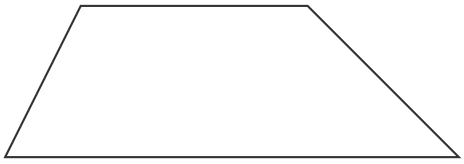


Figura 9Ejemplo de trapecio escaleno.

- **Deltoide (o cometa)**: Dos pares de lados adyacentes iguales.
  - **Deltoide romboidal**: Equivalente a un rombo (todos los lados iguales).

  - **Deltoide general**: Dos pares de lados adyacentes iguales, con diagonales perpendiculares.

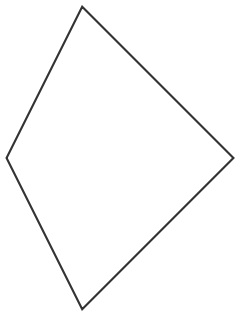


Figura 10Ejemplo de deltoide general (cometa).

- **Trapezoide***: Ningún par de lados paralelos.

  - **Trapezoide irregular**: Sin propiedades adicionales de igualdad o simetría.

*Aunque algunos autores sostienen que el nombre "trapezoide" sobra, a mi criterio es útil para diferenciar claramente los cuadriláteros que no son trapecios ni paralelogramos.

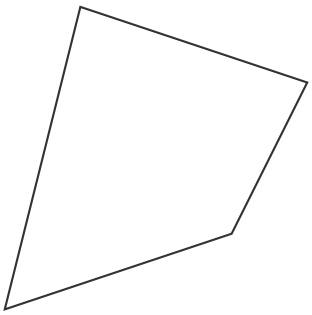


Figura 11Ejemplo de trapezoide irregular.

  - **Trapezoide con lados opuestos iguales**: Un tipo de trapezoide donde dos lados opuestos son iguales en longitud, pero no son paralelos.

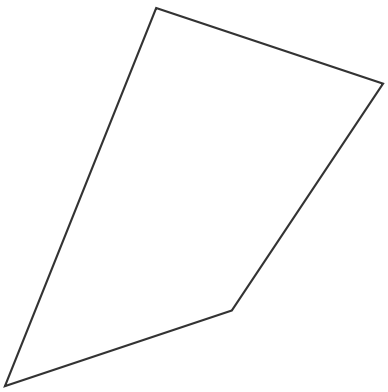


Figura 12Trapezoide con lados opuestos iguales.

4.2. Propiedades superpuestas

Algunos cuadriláteros pueden tener propiedades adicionales que son importantes:

- **Cuadrilátero cíclico**: Inscribible en una circunferencia (suma de ángulos opuestos = 180°).
- **Cuadrilátero tangencial**: Circunscribible (tiene un círculo inscrito, suma de lados opuestos iguales).
- **Cuadrilátero bicéntrico**: Tanto cíclico como tangencial.

4.3. Cuadro comparativo de propiedades

El siguiente cuadro compara propiedades en la familia de los paralelogramos.

Propiedad	Romboide	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Lados opuestos paralelos	✓	✓	✓	✓
Lados opuestos iguales	✓	✓	✓	✓
Todos los lados iguales	–	–	✓	✓
Todos los ángulos rectos	–	✓	–	✓
Diagonales se bisecan	✓	✓	✓	✓
Diagonales son iguales	–	✓	–	✓
Diagonales son perp.	–	–	✓	✓

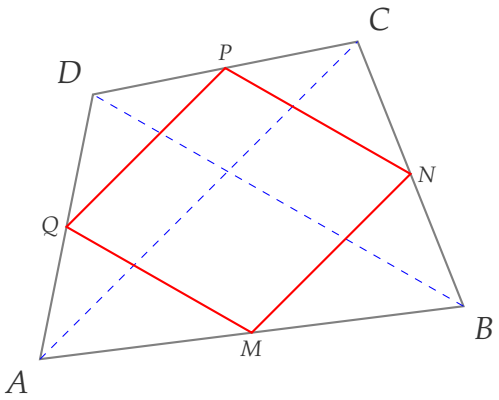
Cuadro 1Comparación de propiedades en la familia de los paralelogramos.

5. Teoremas importantes

5.1. Teorema de Varignon

Teorema 5.1 (Varignon)**.** *El cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero convexo es un paralelogramo.*

Prueba. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean M, N, P, Q los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ respectivamente. Queremos probar que $MNPQ$ es un paralelogramo.



1. **Triángulo** $\triangle ABC$:
En $\triangle ABC$, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
Por el teorema de la línea media:

$$\overleftrightarrow{MN} \parallel AC \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

2. **Triángulo** $\triangle CDA$:
En $\triangle CDA$, Q y P son puntos medios de $\overline{DA}$ y $\overline{CD}$.
Por el teorema de la línea media:

$$\overleftrightarrow{QP} \parallel AC \quad \text{y} \quad \overline{QP} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

3. **Lados opuestos** $\overleftrightarrow{MN}$ **y** $\overleftrightarrow{QP}$:
Como $\overleftrightarrow{MN} \parallel AC$ y $\overleftrightarrow{QP} \parallel AC$, se sigue que:

$$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{QP} \quad \text{y} \quad \overline{MN} = \overline{QP}.$$

4. **Triángulos con diagonal $\overleftrightarrow{BD}$:**
Consideremos $\triangle BCD$ y $\triangle DAB$.
Los segmentos $\overleftrightarrow{NP}$ y $\overleftrightarrow{MQ}$ son cada uno la unión de puntos medios de lados adyacentes a $\overleftrightarrow{BD}$.
Por el teorema de la línea media:

$$\overleftrightarrow{NP} \| \overleftrightarrow{MQ} \quad \text{y} \quad \overline{NP} = \overline{MQ}.$$

5. **Conclusión:**
Como los lados opuestos de $MNPQ$ son paralelos y congruentes:

$$\overleftrightarrow{MN} \| \overleftrightarrow{QP}, \quad \overline{MN} = \overline{QP}, \quad \overleftrightarrow{NP} \| \overleftrightarrow{MQ}, \quad \overline{NP} = \overline{MQ},$$

se concluye que $MNPQ$ es un paralelogramo. □

Corolario 5.1. *El área del paralelogramo de Varignon es la mitad del área del cuadrilátero original.*

5.2. Desigualdad de Ptolomeo

Teorema 5.2 (Ptolomeo)**.** ***Enunciado textual:*** *Para cualquier cuadrilátero convexo $ABCD$, el producto de las longitudes de sus lados opuestos sumados es mayor o igual que el producto de las longitudes de sus diagonales. Es decir,*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD.$$

Además, se cumple la igualdad si y solo si el cuadrilátero es cíclico*, es decir, si todos sus vértices pertenecen a la misma circunferencia.*

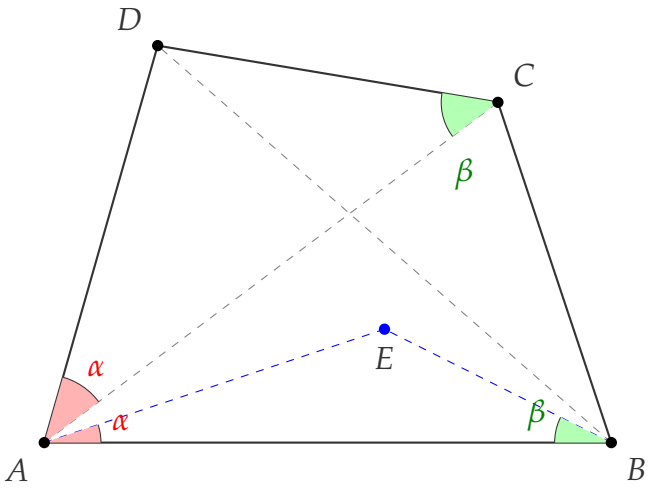
Prueba. La demostración se basa en una construcción auxiliar y el uso de semejanza de triángulos.

1. Construcción

Dado el cuadrilátero convexo $ABCD$, construimos un punto E en el interior del cuadrilátero, de tal manera que se cumplan dos condiciones en los ángulos:

- $B\widehat{A}E = C\widehat{A}D$
- $A\widehat{B}E = A\widehat{C}D$

Esta construcción siempre es posible. La idea es "copiar" el triángulo $\triangle ACD$ en una versión semejante, $\triangle ABE$, usando el lado AB como base.



2. Semejanza de Triángulos

La demostración se desarrolla en dos pasos de semejanza:

Paso A: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

Por nuestra construcción, hemos definido el punto E de tal forma que:

- $D\widehat{A}E = C\widehat{A}B$ (marcado con α en la figura)
- $A\widehat{D}E = A\widehat{C}B$ (marcado con β en la figura)

Por el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA), concluimos que $\triangle ADE \sim \triangle ACB$. De esta semejanza, obtenemos la siguiente proporción entre los lados:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \implies DE = \frac{AD \cdot BC}{AC} \quad (*)$$

Paso B: $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

Ahora, comparemos los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ADC$. Primero, veamos la relación entre sus lados. De la semejanza anterior ($\triangle ADE \sim \triangle ACB$), también tenemos la proporción:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Reordenando los términos, obtenemos:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

Esto nos da una proporción entre dos pares de lados de los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ADC$.

Segundo, veamos el ángulo comprendido entre estos lados.

$$E\widehat{A}B = E\widehat{A}D + D\widehat{A}B$$

Por construcción, sabemos que $E\widehat{A}D = C\widehat{A}B$. Sustituyendo:

$$E\widehat{A}B = C\widehat{A}B + D\widehat{A}B = C\widehat{A}D$$

Entonces, hemos demostrado que el ángulo $E\widehat{A}B$ es igual al ángulo $C\widehat{A}D$.

Con una proporción entre lados y la igualdad del ángulo que forman ($\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ y $E\widehat{A}B = C\widehat{A}D$), podemos usar el criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL) para concluir que $\triangle ABE \sim \triangle ADC$.

De esta segunda semejanza, obtenemos la proporción:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \implies BE = \frac{AB \cdot CD}{AC} \quad (**)$$

3. Desigualdad Triangular

Ahora, consideramos el triángulo $\triangle BDE$. Como en cualquier triángulo, la longitud de un lado no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos. Esto se

conoce como la **desigualdad triangular**. Aplicada a nuestro triángulo, tenemos:

$$BD \leq BE + DE$$

4. Conclusión

Sustituimos las expresiones para BE y DE que encontramos en $(*)$ y $(**)$ en la desigualdad triangular:

$$BD \leq \frac{AB \cdot CD}{AC} + \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

Como AC es una longitud y por tanto un valor positivo, podemos multiplicar ambos lados de la inecuación por AC sin cambiar el sentido de la desigualdad:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Reordenando los términos para que coincidan con el enunciado del teorema:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

Esto completa la demostración de la desigualdad. □

Caso de Igualdad

La igualdad en la desigualdad triangular ($BD = BE + DE$) se cumple si, y solo si, los tres puntos B, E, D son colineales, es decir, el punto E se encuentra sobre el segmento de la diagonal BD.

Si E está en el segmento BD, entonces $A\widehat{D}B = A\widehat{D}E$. Por la primera semejanza (Paso A), sabemos que $A\widehat{D}E = A\widehat{C}B$. Por lo tanto, la igualdad se cumple si y solo si $A\widehat{D}B = A\widehat{C}B$.

Esta condición, que los ángulos subtendidos por el mismo segmento (AB) desde los otros dos vértices (C y D) sean iguales, es la condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos A, B, C, D pertenezcan a la misma circunferencia. En otras palabras, la igualdad se cumple si y solo si el cuadrilátero $ABCD$ es **cíclico**.

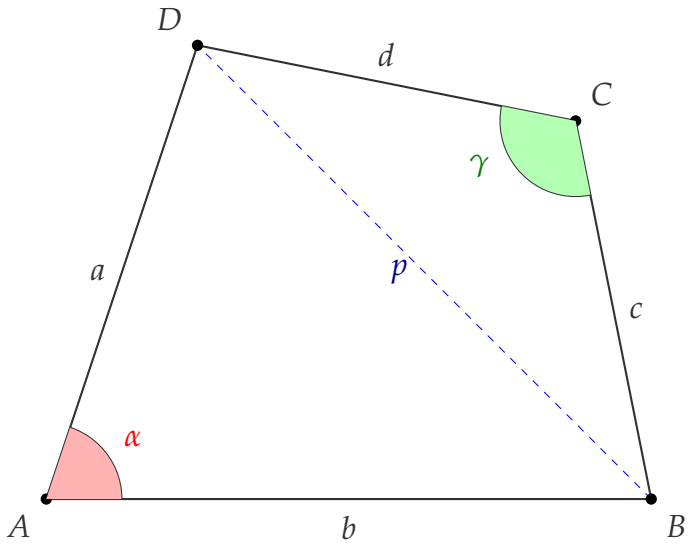
5.3. Teorema de Bretschneider

Teorema 5.3 (Bretschneider). *El área $\mathcal{A}$ de un cuadrilátero general $ABCD$ es dada por:*

$$\mathcal{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

donde a, b, c, d son las longitudes de los lados, s es el semiperímetro, y α, γ son ángulos opuestos.

Prueba. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con lados consecutivos $a = \overline{DA}$, $b = \overline{AB}$, $c = \overline{BC}$, $d = \overline{CD}$. Sean $\alpha = D\widehat{A}B$ y $\gamma = B\widehat{C}D$ un par de ángulos opuestos.



Sean el área de $\triangle DAB$ y $\triangle BCD$, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ respectivamente. Por la fórmula del área en función de dos lados y el ángulo incluido,

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}ab\sin\alpha,$$
$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}cd\sin\gamma.$$

Luego el área total $\mathcal{A}$ del cuadrilátero es

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\gamma.$$

Elevando al cuadrado:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2\sin^2\alpha + 2abcd\sin\alpha\sin\gamma + c^2d^2\sin^2\gamma). \tag{1}$$

Sea p la longitud de la diagonal $\overline{BD}$. Aplicando la ley de los cosenos* en $\triangle DAB$ y $\triangle BCD$:

*Veáse *Ley de los cosenos* (2024)

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$p^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma.$$

Igualando las dos expresiones para p^2 se obtiene

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\gamma.$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab\cos\alpha - cd\cos\gamma)^2. \tag{2}$$

Desarrollando el lado derecho y dividiendo por 4 resulta

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma + c^2d^2\cos^2\gamma.$$

Ahora sumamos cuatro veces la ecuación (1) y la expresión anterior:

$$4\mathcal{A}^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2d^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + 2abcd(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma).$$

Usando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma$ se obtiene

$$4\mathcal{A}^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

De donde

$$4\mathcal{A}^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2. \tag{3}$$

A continuación probamos la identidad algebraica. Definamos

$$P := (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d).$$

Multiplicando en parejas:

$$\begin{aligned}(a + b + c - d)(a + b - c + d) &= (a + b)^2 - (c - d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (c^2 - 2cd + d^2) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2ab + 2cd,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(a-b+c+d)(-a+b+c+d) &= (c+d)^2-(a-b)^2\\ &= c^2+2cd+d^2-(a^2-2ab+b^2)\\ &= -(a^2+b^2-c^2-d^2)+2ab+2cd.\end{aligned}$$

Sea $X := a^2+b^2-c^2-d^2$ y $Y := 2ab+2cd$. Entonces

$$P = (X+Y)(-X+Y) = Y^2-X^2.$$

Calculando Y^2-X^2:

$$\begin{aligned}Y^2-X^2 &= (2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &= 4a^2b^2+8abcd+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &= 4(a^2b^2+c^2d^2)+8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.\end{aligned}$$

Así,

$$P = 4(a^2b^2+c^2d^2)+8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2. \tag{4}$$

Ahora definimos

$$X_0 := a^2b^2+c^2d^2-\tfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2,$$

de manera que (por (4)) se tiene $4X_0 = P-8abcd$. Volvamos a (3) y multipliquémosla por 4:

$$16\mathcal{A}^2 = 4X_0-8abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Sustituyendo $4X_0 = P-8abcd$ obtenemos

$$16\mathcal{A}^2 = P-8abcd-8abcd\cos(\alpha+\gamma) = P-8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma)).$$

Usando la identidad trigonométrica $1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ con $\theta = \alpha+\gamma$, resulta

$$16\mathcal{A}^2 = P-16abcd\cos^2\Big(\frac{\alpha+\gamma}{2}\Big).$$

Recordando que

$$P = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, dividimos por 16 y obtenemos la fórmula de Bretschneider:

$$\mathcal{A}^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\Big(\frac{\alpha+\gamma}{2}\Big).$$

Esto concluye la demostración. Observación: si el cuadrilátero es cíclico entonces $\alpha + \gamma = \pi$ y el segundo término desaparece, recuperándose la fórmula de Brahmagupta $\mathcal{A}^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$. □

6. Ejercicios

6.1. Ejercicios básicos

Ejercicio 6.1.1. *Calcula la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo.*

Ejercicio 6.1.2. *Si un cuadrilátero tiene tres ángulos de 70°, 80° y 100°, ¿cuánto mide el cuarto ángulo?*

Ejercicio 6.1.3. *Verifica si un cuadrilátero con lados 5, 5, 5, 5 es necesariamente un rombo.*

Ejercicio 6.1.4. *¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero convexo y dónde se intersectan?*

6.2. Ejercicios intermedios

Ejercicio 6.2.1. *Demuestra que en un trapecio isósceles, las diagonales son iguales.*

Ejercicio 6.2.2. *Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan mutuamente, ¿es necesariamente un paralelogramo? Justifica tu respuesta.*

Ejercicio 6.2.3. *Encuentra el área de un rombo con diagonales de 6 cm y 8 cm.*

Ejercicio 6.2.4. *Demuestra que los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero convexo forman un paralelogramo (Teorema de Varignon).*

6.3. Ejercicios avanzados

Ejercicio 6.3.1. *Demuestra el teorema de Ptolomeo para cuadriláteros cíclicos.*

Ejercicio 6.3.2. *Usando el teorema de Bretschneider, calcula el área de un cuadrilátero con lados 4, 5, 6, 7 y ángulos opuestos 60° y 120°.*

Ejercicio 6.3.3. *Demuestra que en cualquier cuadrilátero convexo, la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.*

Ejercicio 6.3.4. *Determina si existe un cuadrilátero cíclico con lados consecutivos de longitudes 1, 2, 3, 4. Justifica tu respuesta.*

7. Soluciones

7.1. Ejercicios básicos

Solución al Ejercicio 6.1.1:
La suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo es siempre 360°. Esto se puede demostrar dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos mediante una diagonal. La suma de los ángulos de cada triángulo es 180°, por lo que $180° + 180° = 360°$.

Solución al Ejercicio 6.1.2:
Sea x la medida del cuarto ángulo. La suma de los ángulos interiores debe ser 360°.

$$70° + 80° + 100° + x = 360°$$

$$250° + x = 360° \implies x = 360° - 250° = 110°$$

El cuarto ángulo mide 110°.

Solución al Ejercicio 6.1.3:
Sí. Por definición, un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual longitud. Un cuadrilátero con lados 5, 5, 5, 5 cumple esta condición.

Solución al Ejercicio 6.1.4:
Un cuadrilátero convexo tiene exactamente dos diagonales. Estas se intersectan en un único punto que se encuentra en el interior del cuadrilátero.

7.2. Ejercicios intermedios

Solución al Ejercicio 6.2.1:
Sea el trapecio isósceles $ABCD$ con bases $AB \parallel CD$ y lados no paralelos $AD = BC$. Para demostrar que las diagonales AC y BD son iguales, consideramos los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle BCD$.

- $AD = BC$ (por ser trapecio isósceles).
- $DC = CD$ (lado común).
- $\angle ADC = \angle BCD$ (los ángulos de la base son iguales en un trapecio isósceles).

Por el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL), $\triangle ADC \cong \triangle BCD$. Por lo tanto, sus lados correspondientes son iguales, lo que implica que $AC = BD$.

Solución al Ejercicio 6.2.2:
Sí, es necesariamente un paralelogramo. Sea un cuadrilátero $ABCD$ cuyas diagonales AC y BD se intersectan en un punto M tal que $AM = MC$ y $BM = MD$. Consideremos los triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle CMD$.

- $AM = MC$ (por hipótesis).
- $BM = MD$ (por hipótesis).
- $\angle AMB = \angle CMD$ (por ser ángulos opuestos por el vértice).

Por el criterio LAL, $\triangle AMB \cong \triangle CMD$. Esto implica que $AB = CD$ y $\angle MAB = \angle MCD$. Como estos últimos son ángulos alternos internos, se deduce que $AB \parallel CD$. De forma análoga, se demuestra que $\triangle AMD \cong \triangle CMB$, lo que implica $AD = BC$ y $AD \parallel BC$. Un cuadrilátero con pares de lados opuestos paralelos y de igual longitud es un paralelogramo.

Solución al Ejercicio 6.2.3:
El área de un rombo es la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales (d_1 y d_2).

$$\text{Área} = \frac{d_1 \times d_2}{2} = \frac{6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}}{2} = \frac{48 \text{ cm}^2}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Solución al Ejercicio 6.2.4:
(Teorema de Varignon) Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrilátero cualquiera. Sean P, Q, R, S los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA respectivamente. Usando vectores, tenemos: $\vec{P} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$, $\vec{Q} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$, $\vec{R} = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2}$, $\vec{S} = \frac{\vec{D}+\vec{A}}{2}$. Calculamos los vectores de los lados del cuadrilátero $PQRS$:

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}$$

$$\vec{SR} = \vec{R} - \vec{S} = \frac{\vec{C} + \vec{D}}{2} - \frac{\vec{D} + \vec{A}}{2} = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2}$$

Como $\vec{PQ} = \vec{SR}$, los segmentos PQ y SR son paralelos y de igual longitud. Un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos e iguales es un paralelogramo. Por lo tanto, $PQRS$ es un paralelogramo.

7.3. Ejercicios avanzados

Solución al Ejercicio 6.3.1:
(Teorema de Ptolomeo) En un cuadrilátero cíclico $ABCD$, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. La demostración es extensa, pero una forma clásica es construir un punto K en la diagonal AC tal que $\angle ABK = \angle CBD$. A partir de ahí, se usan las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia para encontrar triángulos semejantes ($\triangle ABK \sim \triangle DBC$ y $\triangle ABD \sim \triangle KBC$) que permiten establecer las relaciones necesarias para llegar a la identidad final.

Solución al Ejercicio 6.3.2:
La fórmula de Bretschneider para el área $\mathcal{A}$ de un cuadrilátero general es:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

donde s es el semiperímetro y α, γ son dos ángulos opuestos. Datos: $a = 4, b = 5, c = 6, d = 7$. El semiperímetro es $s = \frac{4+5+6+7}{2} = 11$. Los ángulos opuestos son $\alpha = 60°$ y $\gamma = 120°$. Su suma es $\alpha + \gamma = 180°$. El término del coseno se convierte en:

$$\cos^2\left(\frac{180°}{2}\right) = \cos^2(90°) = 0$$

Esto significa que el cuadrilátero es cíclico, y la fórmula se simplifica a la de Brahmagupta.

$$\mathcal{A} = \sqrt{(11-4)(11-5)(11-6)(11-7)} = \sqrt{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \sqrt{840} = 2\sqrt{210}$$

Solución al Ejercicio 6.3.3:
(Identidad del cuadrilátero o Ley del Paralelogramo Generalizada) La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero convexo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales más cuatro veces el cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales. Sean M y N los puntos medios de las diagonales AC y BD, respectivamente. La identidad es:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4(MN)^2$$

La demostración se realiza elegantemente con el Teorema de Euler para cuadriláteros o mediante el uso de vectores.

Solución al Ejercicio 6.3.4:

Sí, existe un cuadrilátero cíclico con lados consecutivos de longitudes 1, 2, 3, 4. Un cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia si y solo si la fórmula de Brahmagupta para su área da un valor real y positivo. La fórmula es:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

donde s es el semiperímetro. Calculamos el semiperímetro: $s = \frac{1+2+3+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Ahora calculamos el área:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Como el área es un número real positivo ($\mathcal{A} \approx 4.899$), el cuadrilátero cíclico con esos lados existe.

Referencias

Andonegui Zabala, M. (2006). *Cuadriláteros y otros polígonos. Simetrías*. https://scioteca.caf.com/bitstream/handle/123456789/534/Cuadrilateros_y_otros_poligonos_simetrias.pdf?sequence=3&isAllowed=y

Arciniegas Toro, O. H., & Marcillo Hernández, G. A. (2009). *Estudio sobre clasificación de cuadriláteros en textos escolares, en cuadernos de trabajo y las concepciones acerca de la noción de cuadriláteros en estudiantes de educación básica* [Tesis de licenciatura]. Universidad de Nariño. https://sired.udenar.edu.co/286/1/79891.pdf

CEIP Manuel Siurot (La Palma del Cdo.) (2018). *Las matemáticas son un juego: Cuadriláteros*. https://matematicasiesoja.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/10/clasificacic3b3n-de-los-cuadrilateros1.pdf

Dalcín, M. (2018). Nuevos cuadriláteros convexos: un espacio para la formulación de conjeturas y creación de demostraciones. *Reloj de Agua*, *17*, 13-26. https://ojs.cfe.edu.uy/index.php/rev_matematica/article/view/253

Huerta, M. P. (1996). Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX ¿Qué ha cambiado? *Suma*, *21*, 55-62. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/21/055-062.pdf

Jaime Pastor, A., Chapa Aguilera, F., & Gutiérrez Rodríguez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, *23*, 49-62. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiChaGut92.pdf

López Anguita, R. (2014). *Problemas de Olimpiadas sobre Cuadriláteros* [Trabajo Fin de Máster]. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria4.pdf

ProofWiki contributors. (2024). *Ley de los cosenos*. https://proofwiki.org/wiki/Law_of_Cosines

Quiroz Cerna, W. (2014). *Cuadriláteros geometría*. https://es.slideshare.net/slideshow/cuadrilateros-geometria/25800134

Solano Ruiz, M. (2025). *Cuadriláteros*. https://es.scribd.com/document/619066418/CUADRILATEROS

Suarez Carranza, C. (2014). *Cuadriláteros*. https://es.slideshare.net/slideshow/cuadrilteros-35460786/35460786

Wikipedia contributors. (2025). *Cuadrilátero*. https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadril%C3%A1tero